一，对于三种粒子；波色子：全同，每个单粒子态可占据的粒子数没有限制；费米子：全同，每个单粒子态最多可占据一个粒子；波尔茨曼粒子：粒子可分辨，每个单粒子态可占据的粒子数没有限制。若系统的单粒子能级是 ϵ_i, 对应的简并度为 g_i。

1，如果系统中有 N 个粒子，试对于 N 个粒子在能级上的一种分配 $\{n_i\}$, 求出上述三种粒子的微观状态数。

2，在总能量 $E=\sum_i n_i\epsilon_i$ 给定, 总粒子数 $N=\sum_i n_i$ 给定的条件下，求出各自的分布 n_i.

二，对于宏观系统，可以取系统为体积 $V=L^3$ 的立方体，则单粒子态可以用 $\vec{k}=\frac{2\pi}{L}(n_x,n_y,n_z)$ 来标志.

1, 试证明，对于单粒子态的求和可以写成积分形式

$$\sum_{\vec{k}} f(\vec{k})=\frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3k f(\vec{k})$$

分立的 $\vec{k}$, 在 $\vec{k}$ 空间均匀分布，每个点代表一个状态，每个点对应的体积是：$\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3$. 考虑一个体积元 d^3k, 其中包含的状态数为 $\frac{L^3}{(2\pi)^3}d^3k$, 于是

$$\sum_{\vec{k}} f(\vec{k})=\frac{L^3}{(2\pi)^3}\int d^3k f(\vec{k})=\frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3k f(\vec{k})$$

2, 若单粒子能级为 $\epsilon=\frac{\hbar^2k^2}{2m}$, 且 $f(\vec{k})=f(k)$ 只于 k 的大小有关，则上述积分可以进一步简化为对能量的积分 $\int D(\epsilon)d\epsilon f(\epsilon)$, 试计算态密度 $D(\epsilon)$.

$$\frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3k f(\vec{k})=\frac{V}{(2\pi)^3}4\pi\int k^2dkf(k)$$

由 $\epsilon=\frac{\hbar^2k^2}{2m}$，$d\epsilon=\frac{\hbar^2k}{m}dk=\hbar\sqrt{\frac{2\epsilon}{m}}dk$. 得到

$$dk=\frac{1}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{2\epsilon}}d\epsilon$$

而 $k^2=\frac{2m\epsilon}{\hbar^2}$.

$$\frac{V}{(2\pi)^3}4\pi\int k^2dkf(k)=\int\frac{Vm\sqrt{2m\epsilon}}{2\pi^2\hbar^3}d\epsilon f(\epsilon)$$

于是

$$D(\epsilon) = \frac{Vm\sqrt{2m\epsilon}}{2\pi^2\hbar^3}$$

3, 在极端相对论情形下，单粒子能级 $\epsilon = \hbar ck$, 其中 c 为光速，请重复 2 的计算。

$$\frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3kf(\vec{k}) = \frac{V}{(2\pi)^3}4\pi\int k^2dkf(k)$$

由 $\epsilon = \hbar ck$，$d\epsilon = \hbar cdk$. 得到

$$dk = \frac{1}{\hbar c}d\epsilon$$

而 $k^2 = \frac{\epsilon^2}{\hbar^2c^2}$.

$$\frac{V}{(2\pi)^3}4\pi\int k^2dkf(k) = \int\frac{V\epsilon^2}{2\pi^2\hbar^3c^3}d\epsilon f(\epsilon)$$

于是

$$D(\epsilon) = \frac{V\epsilon^2}{2\pi^2\hbar^3c^3}$$