一，在高温极限下，计算理想费米气体和理想波色气体的物态方程，展开到密度的二次项。

费米气体和波色气体的物态方程可以统一写成 (讲义 5.1.105-106), 上面的符号为费米，下面的符号为波色。

$$\frac{PV}{kT} = \pm \sum_i \ln(1 \pm z e^{-\beta\varepsilon_i})$$

在高温极限下，$z \ll 1$, 上式可以对 z 展开

$$\begin{aligned}\frac{PV}{kT} &= \pm \sum_i \left[\left(\pm z e^{-\beta\varepsilon_i}\right) - \frac{1}{2}\left(\pm z e^{-\beta\varepsilon_i}\right)^2 + \cdots \right] \\ &= z\sum_i e^{-\beta\varepsilon_i} - (\pm)\frac{1}{2} z^2 \sum_i e^{-2\beta\varepsilon_i} + \cdots\end{aligned}$$

另一方面，平均粒子数为

$$\langle N \rangle = z\frac{\partial \ln \Xi}{\partial z} = z\frac{\partial \frac{PV}{kT}}{\partial z}$$

由前一展开式得到

$$\langle N \rangle = z\sum_i e^{-\beta\varepsilon_i} - (\pm) z^2 \sum_i e^{-2\beta\varepsilon_i} + \cdots$$

对于单原子理想气体，$\varepsilon_i = \frac{p^2}{2m}$, 把求和化为积分，可以求得

$$\sum_i e^{-\beta\varepsilon_i} = \frac{V}{\lambda^3}$$

$$\sum_i e^{-2\beta\varepsilon_i} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{V}{\lambda^3}$$

其中：$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}$ 为热波长。

由此得到：

$$\begin{aligned}\frac{PV}{kT} &= z\frac{V}{\lambda^3} \mp \frac{z^2}{4\sqrt{2}}\frac{V}{\lambda^3} + \cdots \\ \langle N \rangle &= z\frac{V}{\lambda^3} \mp \frac{z^2}{2\sqrt{2}}\frac{V}{\lambda^3} + \cdots\end{aligned}$$

由第二式解得

$$z = \lambda^3 n \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}\lambda^6 n^2 + \cdots$$

其中 $n = \frac{\langle N \rangle}{V}$ 为粒子的数密度。代入第一式得到

$$\frac{P}{kT} = n \pm \frac{1}{4\sqrt{2}}\lambda^3 n^2 + \cdots$$

写成熟悉的形式

$$PV = \langle N \rangle kT \left(1 \pm \left(\frac{h^2}{2\pi mkT} \right)^{3/2} \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{\langle N \rangle}{V} + \cdots \right)$$

二，试证明，二维理想波色气体不存在波色 -爱因斯坦凝聚。

平均粒子数为：

$$\langle N \rangle = z \frac{\partial \ln \Xi}{\partial z} = \sum_i \frac{1}{z^{-1} e^{\beta \varepsilon_i} - 1}$$

上式求和转为积分

$$\sum_i \to \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{2} dk^2 = \frac{m}{2\pi \hbar^2} \int d\varepsilon$$

于是：

$$\langle N \rangle = \frac{m}{2\pi \hbar^2} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{1}{z^{-1} e^{\beta \varepsilon} - 1}$$

当 $z = 1$ 时，上述积分在 $\varepsilon = 0$ 附近的行为

$$\propto \int \frac{d\varepsilon}{\beta \varepsilon} \to \frac{1}{\beta} \ln \frac{1}{\varepsilon} \to \infty$$

这样，就不会存在粒子数不守恒的问题，也就不会有波色凝聚。

三，试计算绝对零度时理想费米气体的内能和压强。