一, 如何在有限位数的机器上计算如下表达式？

$$(1).\quad \left(x+\frac{1}{x}\right)^{1/2}-\left(x-\frac{1}{x}\right)^{1/2}, \qquad x\gg 1$$

$$(2).\quad \frac{\ln(1-x)+xe^{x/2}}{x^3}, \qquad |x|\ll 1$$

$$(3).\quad \left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)^{1/2}, \qquad 0\le x<\frac{\pi}{2}$$

$$(4).\quad \frac{1}{1+2x}-\frac{1-x}{1+x}, \qquad |x|\ll 1$$

（1）：

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{1/2}-\left(x-\frac{1}{x}\right)^{1/2}=\frac{2}{x}\frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^{1/2}+\left(x-\frac{1}{x}\right)^{1/2}}$$

或:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{1/2}-\left(x-\frac{1}{x}\right)^{1/2}=\frac{1}{x\sqrt{x}}(1+\frac{1}{8}\frac{1}{x^4}+\frac{7}{128}\frac{1}{x^8}+\cdots)$$

展开前两项即可。

（2）

$$\frac{\ln(1-x)+xe^{x/2}}{x^3}=-\frac{5}{24}-\frac{11}{48}x+\cdots$$

(3)

$$\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)^{1/2}=\tan\frac{x}{2}$$

(4)

$$\frac{1}{1+2x}-\frac{1-x}{1+x}=\frac{2x^2}{(1+2x)(1+x)}$$

(4B)

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}-\frac{x^2}{24}+\frac{x^4}{720}$$

二, 利用5点高斯-拉盖尔方法计算

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}dx$$

$$\frac{0.264^3\times 0.679}{e^{0.264}-1}+\frac{1.413^3\times 2.048}{e^{1.413}-1}+\frac{4.537^3\times 2.769}{e^{4.537}-1}+\frac{7.086^3\times 4.316}{e^{7.086}-1}+\frac{12.641^3\times 7.219}{e^{12.64}-1}=6.03$$

二B, 利用 6点高斯-勒让德方法计算如下积分:

$$\int_{-1}^1 \frac{\cos(0.5x)}{\sqrt{2-x^2}}dx$$

$$2\left(\frac{0.468\times\cos(0.5\times 0.239)}{\sqrt{2-0.239^2}}+\frac{0.361\times\cos(0.5\times 0.661)}{\sqrt{2-0.661^2}}+\frac{0.171\times\cos(0.5\times 0.932)}{\sqrt{2-0.932^2}}\right)=1.50$$

五, 1， 如何用快速方法计算卷积

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-x')g(x')dx'$$

2，用快速傅立叶变换计算如下8点离散傅立叶变换

$$F_n = \sum_{m=0}^{7} f_m e^{2\pi i n m/8}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots, 7$$

(请把$f_n$的数据编号写在此处： $f_n$的编号 (________) )

1, 分别用快速方法计算 $f$ 和$g$的傅立叶变换； 相乘；再用快速算法做逆变换。

2， 一个计算过程的范例： $w = e^{2\pi i/8} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

| $f_0$ $f_1$ | $f_2$ $f_3$ | $f_4$ $f_5$ | $f_6$ $f_7$ |
|---|---|---|---|
| $h_0 = f_0$ $h_1 = f_4$ | $h_2 = f_2$ $h_3 = f_6$ | $h_4 = f_1$ $h_5 = f_5$ | $h_6 = f_3$ $h_7 = f_7$ |
| $g_{0,0} = h_0 + h_1$ | $g_{0,1} = h_2 + h_3$ | $g_{0,2} = h_4 + h_5$ | $g_{0,3} = h_6 + h_7$ |
| $g_{1,0} = h_0 + w^4 h_1$ | $g_{1,1} = h_2 + w^4 h_3$ | $g_{1,2} = h_4 + w^4 h_5$ | $g_{1,3} = h_6 + w^4 h_7$ |
| $H_{0,0} = g_{0,0} + g_{0,1}$ | | $H_{0,1} = g_{0,2} + g_{0,3}$ | |
| $H_{1,0} = g_{1,0} + w^2 g_{1,1}$ | | $H_{1,1} = g_{1,2} + w^2 g_{1,3}$ | |
| $H_{2,0} = g_{0,0} + w^4 g_{0,1}$ | | $H_{2,1} = g_{0,2} + w^4 g_{0,3}$ | |
| $H_{3,0} = g_{1,0} + w^6 g_{1,1}$ | | $H_{3,1} = g_{1,2} + w^6 g_{1,3}$ | |
| $F_0 = H_{0,0} + H_{0,1}$ | $F_1 = H_{1,0} + wH_{1,1}$ | $F_2 = H_{2,0} + w^2 H_{2,1}$ | $F_3 = H_{3,0} + w^3 H_{3,1}$ |
| $F_4 = H_{0,0} + w^4 H_{0,1}$ | $F_5 = H_{1,0} + w^5 H_{1,1}$ | $F_6 = H_{2,0} + w^6 H_{2,1}$ | $F_7 = H_{3,0} + w^7 H_{3,1}$ |

七, 基于中心极限定理，请构造通过$[0,1]$区间上均匀分布的随机数而产生高斯分布随机数的方法。(高斯分布的随机数具有如下概率密度函数： $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ )

中心极限定理： $n$足够大时

$$P\left(\frac{1}{n}\sum_{i}^{n} x_i - E[x] \le \frac{X\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{X} e^{-x^2/2} dx$$

其中$x_i$可以为任何存在方差的分布，包括均匀分布。 $E[x]$是$x_i$的期望值。

于是

$$P\left(\frac{X\sigma}{\sqrt{n}} \le \frac{1}{n}\sum_{i}^{n} x_i - E[x] \le \frac{(X+dX)\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-X^2/2} dX$$

上式表明

$$\frac{\frac{1}{n}\sum_i^n x_i - E[x]}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = X$$

的概率密度是 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-X^2/2}$, 即满足Gauss分布。 对于$(0,1)$上的均匀随机数， $E[x] = \frac{1}{2}$, $\sigma = \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{12}}$， 于是

$$X = \frac{\frac{1}{n}\sum_i^n x_i - \frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{12n}}}$$

满足Gauss 分布， 特别， 当$n=12$时，

$$X=\sum_{i}^{12} x_i-6$$

近似满足Gauss分布。

八, 如下积分的被积函数均含有奇点，请设计出处理奇点的方法。

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}dx, \qquad \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$$

例如,取$\epsilon$为一合适的小数字

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}dx=\int_0^\epsilon (1+\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120})dx+\int_\epsilon^\pi \frac{\sin x}{x}dx=\epsilon+\frac{\epsilon^3}{18}+\frac{\epsilon^5}{600}+\int_\epsilon^\pi \frac{\sin x}{x}dx$$

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx=\int_0^\epsilon (\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{x^{3/2}}{2}+\frac{x^{7/2}}{24})dx+\int_\epsilon^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{\epsilon}-\frac{\epsilon^{5/2}}{5}+\frac{\epsilon^{9/2}}{108}+\int_\epsilon^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$$

B

$$\int_0^2 \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}dx=\int_0^2 (\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}})dx+\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{2}+\int_0^2 \frac{-\sqrt{x}}{1+x}dx$$